Leçon 218 : Applications des formules de Taylor.

Développements :

Théorème central limite et ϕ_X est C^2 si et seulement si $X \in L^2$, Théorème de Bernstein-Valiron.

Bibliographie :

Bernis, Rombaldi analyse réelle, Pommellet, Gourdon, Rouvière, El Amrani.

Rapport du jury :

Il faut connaître les formules de Taylor et certains développements très classiques. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Le candidat doit pouvoir justifier les différentes formules de Taylor proposées ainsi que leur intérêt. Le jury s'inquiète des trop nombreux candidats qui ne savent pas expliquer clairement ce que signifient les notations o ou O qu'ils utilisent. De plus la différence entre l'existence d'un développement limité à l'ordre deux et l'existence de dérivée seconde doit être connue. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives. Pour aller plus loin, on peut mentionner des applications en algèbre bilinéaire (lemme de Morse), en géométrie (étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema) et, même si c'est plus anecdotique, en probabilités (Théorème central limite). On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n-ième sont bornées. On soignera particulièrement le choix des développements.

Remarque 1 (OA). *Cadre : E et F désignent des $\mathbb{R}$-evn de dimension finie. Ou prendre directement $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$.*

1 Rappel des formules de Taylor

Proposition 2 (OA p24). *Formule de Taylor Young.*

Proposition 3 (OA p25). *[Gourdon p308] Formule de Taylor reste intégral.*

Proposition 4 (OA p25). *[Gourdon p308] Formule de Taylor-Lagrange.*

Proposition 5. *Inégalité de Taylor-Lagrange.*

2 Etude locale

2.1 Développements limités

Exemple 6 (Rombaldi p209). *DL classiques.*

Remarque 7. *La formule de Taylor-Young n'est pas toujours très pratique pour obtenir un DL étant donné, le plus souvent, la difficulté de calcul des dérivées successives (cf arctan). De plus, une fonction peut très bien admettre un DL à l'ordre $n \geq 1$ en 0 sans être dérivable à l'ordre 2 en ce point.*

Proposition 8 (Rombaldi p208). *Liens entre continuité, dérivabilité et DL.*

Contre exemple 9 (Rombaldi p208). *$x^3 sin(1/x)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'admet pas de dérivée seconde en ce point.*

Exemple 10. *Suites récurrentes : équivalents, limites..* sin, ln $e^{-x^2} + x$.

2.2 Etude de comportements locaux de courbe

Proposition 11 (Romb p315). *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}$ une courbe paramétrée C^∞. Définition de p et q et discussion en fonction de leur parité.*

2.3 Extrema locaux

Proposition 12 (Gourdon p316). *Point critique.*

Contre exemple 13 (OA p17). *x^3.*

Proposition 14 (Gourdon p316). *[OA p18] Minimum et forme quadratique.*

Contre exemple 15 (Gourdon p316). *[OA p18] Si Q est simplement positive, il n'y a pas nécessairement de minimum ralatif.*

Proposition 16 (Gourdon p317). *Cas dans $\mathbb{R}^2$, notations de Monge.*

Proposition 17 (Rouvière p329). *f est convexe si et seulement si $d^2 f$ est une forme quadratique positive en tout point.*

2.4 Lemme de Morse

Proposition 18 (Rouvière). *Lemme de Morse.*

Application 19 (Rouvière). *Position d'une surface par rapport à ses plans tangents.*

3 Etude globale

3.1 Développements en série entière

Définition 20. *Série de Taylor de f.*

Proposition 21 (Gourdon p240)**.** *DSE si et seulement si le reste tend vers* 0*.*

Contre exemple 22 (Gourdon p241)**.** *Une série entière peut avoir un rayon de convergence non nul mais sa somme est différente de f.*

Exemple 23 (Gourdon p241)**.** *DSE de exp.*
Autres exemples.

Proposition 24 (Gourdon p250)**.** *Théorème de Bernstein.*

Application 25 (Gourdon p251)**.** *tan est DSE sur* $]-\pi/2, \pi/2[$.

Proposition 26 (Rouvière p359)**.** *Théorème de Borel. (1)*

Application 27. *Soit f une fonction C^∞ telle que $f^{(n)}(0) = n!$. Alors la série de Taylor de la fonction a un rayon de convergence nul...*

Remarque 28. *Toute série entière de rayon de convergence non nul est le développement de Taylor d'une fonction C^∞ au voisinage de* 0*.*

Remarque 29. *Une fonction de classe C^∞ est un polynôme si, et seulement si, dérivées nulles à partir d'un certain rang.*

Proposition 30 (El Amrani)**.** *Si f est C^∞ et $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$ alors f est DSE.*

3.2 Inégalités et estimation des dérivées

Exemple 31 (Rombaldi p189)**.** *Inégalités par Taylor Lagrange.*

Proposition 32 (Rombaldi p193)**.** *Inégalités de Kolmogorov.*

Proposition 33. *Lemme de Hadamard.*

4 Estimation d'erreurs numériques

4.1 Intégration numérique

Définition 34 (Demailly p59)**.** *Méthode de quadratures élémentaires et composées.*

Corollaire 35 (Demailly p68)**.** *Majoration de l'erreur.*

Exemple 36 (Demailly p)**.** *[Pommellet] Tableau avec des exemples de méthodes ; rectangle, simpson...*

4.2 Recherche de points fixes

Proposition 37 (Rouvière p149)**.** *Points attractifs.*

Proposition 38 (Rouvière p152)**.** *Méthode de Newton.*

Exemple 39 (Rouvière p152)**.** *Exemple.*

5 Application en probabilités

Proposition 40. *ϕ_X est C^2 si et seulement si $X \in L^2$.*

Proposition 41. *Même proposition avec $X \in L^p$.*

Théorème 42. *Théorème central limite.*